661. 非可換群ノ双對定理ニ付イテ(I)

淡中 忠郎

Pontrjagin ノ代數的双對定理ガ各方面ニ應用ガ廣イノデ之レヲ非可換群ニ(最後ノ目的ノ所マデニハ未ダ達シテナイガ)ドレ位移セルカヲ考ヘテ見ルコトニスル。

$\mathfrak{G}$ガ一般ノ topological group ノ場合ニハ dual group ニ當ルモノガ第一ノ問題デアルガ之レハ

次ノ様ナ semi group ヲ考ヘルノガ自然デアル。即チ $\overline{\mathfrak{G}}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ bounded representation $D(x)=\{D_{\rho\sigma}(x)\}$ ノ集合トシ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ中デ

$$D^{(1)}\times D^{(2)} \qquad (\text{Kronecker 積})$$

$$C^{-1}DC \qquad (C\text{ ハ任意ノ matrix})$$

$$\begin{pmatrix} D^{(1)} & & & \\ & D^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^{(k)} \end{pmatrix}$$

ナル operation ヲ考ヘニ入レタトキ $\overline{\mathfrak{G}}$ ヲ dual semi group トデモ稱ヘルコトニスレバ $\overline{\mathfrak{G}}$ ガ Character group ノ代用ニナルデアラウト考ヘルノガ穏當デアル。一般ナ $\mathfrak{G}$ デ $\overline{\mathfrak{G}}$ ヲ考ヘルトキハ勿論 $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ topology ガ面倒ナ問題ニナルガ、コヽデハ discrete ニシテ進メル。（$\mathfrak{G}$ ガ bicompact ノ場合ヲシバラク目標ニスルカラ abel ノ場合カラ類推シテ見テモ之レデ不都合ヲ生ジナイコトハ想像サレル）

次ニ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ表現 A トハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノスベテノ Element ニソノ次數ト同ジ次數ノ matrix ヲ對應サシ之ヲ

$$D \xrightarrow{A} D\cdot A$$

トカクコトニスレバ、次ノ様ナ條件ヲ満足サレル場合ニ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ表現ト云フ。

D unitary ナラバ $D\cdot A$ モ unitary

$$(D^{(1)}\times D^{(2)})\cdot A=(D^{(1)}\cdot A)\times(D^{(2)}\cdot A)$$

$$(C^{-1}DC)\cdot A=C^{-1}(DA)\cdot C$$

$$\begin{pmatrix} D^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & D^{(k)} \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} D^{(1)}A & & & \\ & D^{(2)}A & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^{(k)}A \end{pmatrix}$$

ニツノ表現 A_1, A_2 ノ積ハ

$$D \cdot A_1 A_2 = (DA_1) \cdot (DA_2)$$

デ定義スルコトニスレバ積モ表現ニナルコト、コノ積ニ関シテスベテノ表現ガ群ヲ作ルコトハ見易イ。コノ群ヲ $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ト書ク．問題ハコノ群ト $\mathfrak{G}$ トノ関係デアル。

表現ヲモウ少シ取扱ヒヤスクスルタメニNeumann (Trans. A. M. S. (1934)) ノ結果ヲ用ヒル。(記号モ説明ナシニ引用スル)。函数 $\sqrt{S(\alpha)}\, D_{\rho\alpha}(x;\alpha)$ ノ全体ハ normalized orthogonal system ヲ作リ之レ等ヲ $f_p(x)$ デ表スト

$$\text{(i)} \quad f_p(x)\, f_q(x) = \sum_r \alpha_{pq}^{r}\, f_r(x)$$

$$\text{(ii)} \quad \bar{f}_p(x) = \overline{f_p(x)} = \sum_s \beta_p^{s}\, f_s(x)$$

ノ様ナ関係ガ成立スル．コヽデ

$$\{D_{\rho\alpha}(x;\alpha)\} \cdot A = \{D_{\rho\alpha}(A;\alpha)\}$$

$$f_p(A) = \sqrt{S(\alpha)} \cdot D_{\rho\alpha}(A;\alpha)$$

ト書ケバ

(Lemma 1) $\quad f_p(A) \cdot f_q(A) = \sum_r \alpha_{pq}^{r}\, f_r(A)$

証明： 殆ンド自明．念ノタメニ書イテ見ルト

$$f_p(x)=\sqrt{S(\alpha)}\cdot D_{\rho\sigma}(x;\alpha)$$

$$f_q(x)=\sqrt{S(\vartheta)}\cdot D_{\tau\nu}(x;\vartheta)$$

$$\{D_{\rho\sigma}(x;\alpha)\}\times\{D_{\tau\nu}(x;\vartheta)\}\cdot A$$
$$=\{D_{\rho\sigma}(A;\alpha)\}\times\{D_{\tau\nu}(A;\vartheta)\}$$

$$\{D_{\rho\sigma}(x;\alpha)\}\times\{D_{\tau\nu}(x;\vartheta)\}$$
$$=C^{-1}\begin{pmatrix} D(x;\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & D(x;\alpha_K)\end{pmatrix}C$$

故＝

$$\{D_{\rho\sigma}(A;\alpha)\}\times\{D_{\tau\nu}(A;\vartheta)\}$$
$$=C^{-1}\begin{pmatrix} D(A;\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & D(A;\alpha_K)\end{pmatrix}C$$

等々。

(*Lemma* 2) $\bar{f}_p(A)=\sum_s \beta_p^s f_s(A)$

証明： 仝前

(*Lemma* 3) $\bar{f}_p(A)=\overline{f_p(A)}$

証明： $f_p(x)=\sqrt{S(\alpha)}\cdot D_{\rho\sigma}(x)$

$\{D_{\rho\sigma}(x)\}$ ハ unitary ダカラ

$$\sum_\nu D_{\rho\nu}(x)\cdot\overline{D}_{\sigma\nu}(x)=\delta_{\rho\sigma}$$

故ニ Lemma 1, 2 カラ

$$\sum_{\nu} D_{\rho\nu}(A)\cdot\bar{D}_{\sigma\nu}(A)=\delta_{\rho\sigma}$$

一方 $\{D_{\rho\sigma}(A)\}$ ガ unitary ノコトカラ

$$\sum_{\nu} D_{\rho\nu}(A)\cdot\overline{D_{\sigma\nu}(A)}=\delta_{\rho\sigma}$$

$$\therefore\quad \bar{D}_{\sigma\nu}(A)=\overline{D_{\sigma\nu}(A)}$$

$R_{\mathfrak{g}}$ ヲ $f_p(x)$ ノ linear combination 全体ノ作ル Ring トスルト (i) ハ $R_{\mathfrak{g}}$ ヲ多元数系ト見做シタ時ノ composition table トナリ A ガ $R_{\mathfrak{g}}$ ノ一次ノ表現ヲ與ヘルコトニナル。

(勿論

$$\sum_p c_p f_p(x)\longrightarrow\sum_p c_p f_p(A)$$

ナル對應ノ下ニ)

(Lemma 4) 逆ニ $f_p(x)\longrightarrow f_p(A)$ デ與ヘラレタ $R_{\mathfrak{g}}$ ノ一次ノ表現ガ

$$\bar{f}_p(A)=\overline{f_p(A)}$$

ヲ満足スレバ任意ノ $\mathfrak{g}$ ノ表現 $\{D_{\rho\sigma}(x)\}$ ニ對シテ

$$\{D_{\rho\sigma}(x)\}\longrightarrow\{D_{\rho\sigma}(A)\}$$

ナル對應ハ $\bar{\mathfrak{g}}$ ノ表現デアル。

證明： 略.

(Lemma 5) $\sum_p c_p f_p(x)=f(x)$ ノ實数部

$\mathcal{R}[f(x)]$ ハ $R_{\mathfrak{g}}$ ニ属ス。

証明：
$$f(x)=\sum_p(c'_p+ic''_p)\left(\mathcal{R}[f_p(x)]+i\mathcal{J}[f_p(x)]\right)$$

$$\mathcal{R}[f_p(x)]=\frac{1}{2}[f_p(x)+\bar{f}_p(x)] \text{ ハ (ii) カラ}$$
$$\subset R_{\mathfrak{g}}$$

仝様ニ

$$\mathcal{J}[f_p(x)]\subset R_{\mathfrak{g}}$$

$$\therefore\quad \mathcal{R}[f(x)]=\sum_p\left\{c'_p\mathcal{R}[f_p(x)]-c''_p\mathcal{J}[f_p(x)]\right\}$$
$$\subset R_{\mathfrak{g}}$$

(*Lemma* 6) $f(x)=\sum_p c_p f_p(x)$,*real* ナラバ $f(A)$ モ *real*.」

証明：
$$f(x)=\bar{f}(x)=\sum_p \bar{c}_p\bar{f}_p(x)$$
$$\longrightarrow \sum_p\bar{c}_p\cdot\bar{f}_p(A)=\sum_p\bar{c}_p\cdot\overline{f_p(A)}=\bar{f}(A)$$
$$\therefore\quad f(A)=\overline{f(A)}.$$

(*Lemma* 7) $\mathcal{R}[f(x)]\longrightarrow\mathcal{R}[f(A)]$.

証明： *Lemma* 5 カラ $f(x)=g(x)+ih(x)$ トスルト

$$g(x),\ h(x)\subset R_{\mathfrak{g}}$$
$$g(x)\longrightarrow g(A)\quad (\textit{real})$$
$$h(x)\longrightarrow h(A)\quad (\textit{real})$$

カラ明ラカ。

(*Lemma* 8) $\sum_p c_p f_p(x)\geqq 0$ ナラ $\sum_p c_p f_p(A)\geqq 0$」

証明：$\sum_p c_p f_p(x)$ ニ現ハレル $D_{\rho\alpha}(x;\alpha)$ ヲ全部含ム表現ヲ $D(x)$ トシ $\mathfrak{f}$ ヲ $D(x)$ デ unit matrix ニ写サレル $\mathfrak{G}$ ノ元素全体ノ作ル部分群トスル。（$D(x)$ ハ unitary matrix）。x ガ $\mathfrak{G}$ ヲ動イクトキ $D(x)$ ノ作ル群ヲ $\mathfrak{G}'$ トスルト

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{G}'$$

ハ stetig isomorph デアル。（topologisch トハ限ラナイ。例ヘバ $\mathfrak{G}$ ヲ實數ノ addition ノ群

$$f_1(x) = e^{ix}, \quad f_2(x) = e^{i\rho x} \quad (\rho \text{ 無理數})$$

トスルト

$$x \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{ix} & \\ & e^{i\rho x} \end{pmatrix}$$

ハ逆ガ連續デナイ）。$\mathfrak{G}'$ ノ bounded continous ナ表現ハ又 $\mathfrak{G}$ ノ夫レデモアルカラ A ハ $\mathfrak{G}'$ ノ dual semi group $\overline{\mathfrak{G}'}$ ノ表現トモ考ヘラレル。從ッテ定理ノ $\mathfrak{G}$ ノ代リニ $\mathfrak{G}'$ ヲ始メカラ考ヘテモ差支ヘナイ。

以下 $\mathfrak{G}$ ハ unitary matrix カラナル群 $\{D_{\rho\alpha}(x)\}$ トシテ $\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(x) \geqq 0$ カラ $\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(A) \geqq 0$ ヲ出スコトニスル。（勿論 matrix トシテノ topology ヲ入レテアル）

次ニ $\mathfrak{G}''$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ abgeschlassene Hülle トシソノ Element ヲ y ト表ハス；

$$y = \{D_{\rho\alpha}(y)\}$$

$\mathfrak{G}''$ ノ任意ノ表現ヲ $\{\varphi_{ij}(y)\}$ トスルト

$$\phi(\varphi_{ij}(\eta), \overline{\varphi}_{ij}(\eta)) = 0 \quad (\phi : 多項式)$$

ナラバ

$$\phi(\varphi_{ij}(x), \overline{\varphi}_{ij}(x)) = 0 \quad x \in \mathfrak{G}$$

$$\therefore \quad \phi(\varphi_{ij}(A), \overline{\varphi}_{ij}(A)) = 0$$

即チ　$\{\varphi_{ij}(\eta)\} \to \{\varphi_{ij}(A)\}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}''$ ノ表現

又　$\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(x) \geqq 0$ ナラ $\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(\eta) \geqq 0$

故ニ　$\mathfrak{G}''$ デ定理ヲ証明スレバヨイ。

$\mathfrak{G}$ ヲ始メカラ unitary matrix ノ closed group ノ $\{D_{\rho\alpha}(x)\}$ トシ

$$\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(x) \geqq 0 \text{ カラ}$$

$$\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(A) \geqq 0$$

ヲ出ス。

unitary matrix $\{D_{\rho\alpha}(A)\}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ中ニアレバ問題ナイカラ $\mathfrak{G}$ ノ中ニナイモノトシ $\mathfrak{G}_0$ ヲ $A = \{D_{\rho\alpha}(A)\}$ ト $\mathfrak{G}$ ヲ含ム closed ナ群トスル。$\mathfrak{G}$ ハ bikompakt デアルカラ $\mathfrak{G}_0$ デ閉デヲ居ル。$\mathfrak{G}$ ノ表現 $\{\varphi_{ij}(x)\}$ ヲ任意ニトルト von Kampen (Annals of Math. vol. 37 (1926)) P. 82 Remark 1 カラ

$$(*) \quad \varphi_{ij}(x) = \phi(D_{\rho\alpha}(x), \overline{D}_{\rho\alpha}(x))$$

$x \in \mathfrak{G}$ ナラバ勿論

$$\{\varphi_{ij}\} \to \{\varphi_{ij}(x)\}$$

ヨリ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ表現ガ得ラレ、且

$$\{\varphi_{ij}(x_1\, x_2)\} = \{\varphi_{ij}(x_1)\}\cdot\{\varphi_{ij}(x_2)\}$$

デアルカラ $\mathfrak{G}$ ノ積ニハ $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ノ積ガ對應スル、x ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ元素ト考ヘテモ差支ヘナイワケデアル．A ニ對シテハ

$$x\cdot A = \{D_{\rho\sigma}(x)\}\cdot\{D_{\rho\sigma}(A)\} = \{D_{\rho\sigma}(x\,A)\}$$

$$\bar{x}\cdot\bar{A} = \{\bar{D}_{\rho\sigma}(x)\}\cdot\{\overline{D_{\rho\sigma}(A)}\} = \{\bar{D}_{\rho\sigma}(x)\}\cdot\{\bar{D}_{\rho\sigma}(A)\}$$

故ニ（＊）デ

$$\varphi_{ij}(A) - \phi\left(D_{\rho\sigma}(A), \bar{D}_{\rho\sigma}(A)\right)$$

$$\varphi_{ij}(xA) = \phi\left(D_{\rho\sigma}(xA), \bar{D}_{\rho\sigma}(xA)\right)$$

ト置ケバ

$$\begin{pmatrix} \{\varphi_{ij}(x)\} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} = C^{-1}\{D_{\rho\sigma}(x)\}\times\cdots\times\{\bar{D}_{\rho\sigma}(x)\}\times\cdots C$$

従ッテ上ノコトカラ

$$\begin{pmatrix} \{\varphi_{ij}(x)\} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \{\varphi_{ij}(A)\} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= C^{-1}\{D_{\rho\sigma}(xA)\}\times\cdots\cdots\times\{\bar{D}_{\rho\sigma}(xA)\}\times\cdots\cdots C$$

$$= \begin{pmatrix} \{\varphi_{ij}(xA)\} & \cdots\cdots & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$左辺 = \begin{pmatrix} \{\varphi_{ij}\} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} x_0 A$$

$x_0 A$ ハ x, A ヲ $\overline{\overline{\mathfrak{g}}}$ ノ元素ト考ヘタ時ノ積。

即チ

$$\begin{pmatrix} \{\varphi_{ij}(x_0 A)\} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\varphi_{ij}(xA)\} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix}$$

トナッテ $x \cdot A$ ナル matrix ノ積ハ同時ニ $\overline{\overline{\mathfrak{g}}}$ ニ於ケル積ト考ヘテモ差支ヘナイ。仝様ナ考ヘデ $\mathfrak{g}_0$ ノ任意ノ Element ハ皆ソノ積ヲ $\overline{\overline{\mathfrak{g}}}$ ノ中ノ積ト考ヘテ $\mathfrak{g}_0 \subset \overline{\overline{\mathfrak{g}}}$ トシテヨイ。之レヲ式デ書ケバ

$$(*) \quad \begin{cases} \psi(D_{\rho\sigma}(x), \overline{D}_{\rho\sigma}(x)) = 0 & x \in \mathfrak{g} \text{ ナラバ} \\ \psi(D_{\rho\sigma}(y), \overline{D}_{\rho\sigma}(y)) = 0 & y \in \mathfrak{g}_0 \end{cases}$$

$$\overline{D}_{\rho\sigma}(y) = \overline{D_{\rho\sigma}(y)}$$

($\overline{D}_{\rho\sigma}(y)$ ハ $y \in \overline{\overline{\mathfrak{g}}}$ ト考ヘテ $(\overline{D}_{\rho\sigma}) \longrightarrow \{\overline{D}_{\rho\sigma}(y)\}$

ナル表現デ得ラレタ値)

次ニ $\mathfrak{g}_0$ 及ビ $\mathfrak{g}$ ノ mean ヲ比較スル。先キニ引用シタ von Kampen ノ定理ヲ $\mathfrak{g}_0$ ニ適用スルト $\mathfrak{g}$ ノ irreducible ナ表現カラ得タ normalized orthogonal system ノ函數ハ皆 $D_{\rho\sigma}(y)$ $\overline{D}_{\rho\sigma}(y)$ ノ多項式デアル、從ッテ $R_{\mathfrak{g}_0}$ ノ元ハ

$$\sum c_p f_p(y)$$

（ $f_p(x)$ ハ $R_{\mathfrak{G}}$ ノ normalized orthogonal fu. 之レハ $D_{\rho\alpha}(x)$ 及ビ $\bar{D}_{\rho\alpha}(x)$ ノ多項式）

特ニ $f_0(y)=f_0(x)=1$ トオケバ

$$f(x)=C_0+\sum_{p\neq 0} c_p f_p(x)$$

ノ $\mathfrak{G}$ ニ於ケル mean ハ

$$\underset{x}{M}[f(x)]=C_0$$

$D_{\rho\alpha}(x)$ ハ

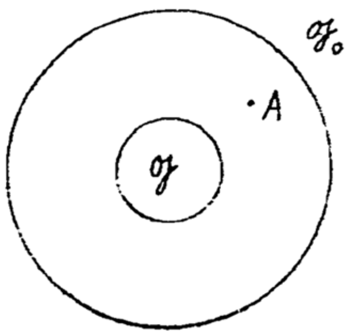
$$\{D_{\rho\alpha}(x)\}=\begin{pmatrix} \{D_{\rho_1\sigma_1}(x;\mathfrak{L}_1)\} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix}$$

ノ如ク irreducible ノモノニ分ケテアッタモノトスルト $f_\rho(x)=\sqrt{s(\mathfrak{L}_1)}\cdot D_{\rho_1\sigma_1}(x;\mathfrak{L}_1)$ ハ normalized デアル。

$\{D_{\rho_1\sigma_1}(y;\mathfrak{L}_1)\}$ ……ハ尚更 irreducible デアルカラ $\sqrt{s(\mathfrak{L}_1)}\cdot D_{\rho_1\sigma_1}(y;\mathfrak{L}_1)$ ……ハ normalized in $\mathfrak{G}_0$ デアル。$D_{\rho\alpha}$ 以外ノ表現ニツイテモ全様ニヤレバヨイ.

$$\therefore\ \underset{y}{M}\{f(y)\}=\underset{y}{M}\{C_0+\sum_{p\neq 0}C_p f_p(y)\}=C_0$$

以上ノ準備ガ終ルト後ハ次ノ様ニスレバヨイ。



$\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{G}_0$ デ closed デアルカラ $\mathfrak{G}$ デ 0, A デノナル値ヲトル連続函数（従ッテ a.p. function）$\varphi(y)$

ガ存在スル。（$\varphi(y) \geqq 0$）

approximation theorem カラ

$$\left| \varphi(y) - \sum_p c_p f_p(y) \right| < \varepsilon$$

特ニ

$$\left| \varphi(x) - \sum_p c_p f_p(x) \right| < \varepsilon$$

y, x ニツイテ *mean* ヲ作ルト両者カラ夫々

$$\left| \underset{y}{M}[\varphi(y)] - C_0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \underset{x}{M}[\varphi(x)] - C_0 \right| < \varepsilon$$

後者カラ　$|C_0| < \varepsilon$

$$\therefore \quad \underset{y}{M}[\varphi(y)] < 2\varepsilon, \quad \underset{y}{M}[\varphi(y)] = 0$$

之レハ　$\varphi(A) = 1$,　$\varphi(y) \geqq 0$　ニ反スル。

$$\therefore \quad A \subset \mathcal{G}$$

従ッテ当然　$\sum c_{\rho\sigma} D_{\rho\sigma}(A) \geqq 0$

以上デ証明ガ終ル。証明ノ途中一回 *limiting proces* ガアルカラ

$$\sum c_p f_p(x) > 0 \quad \text{カラ} \quad \sum c_p f_p(A) > 0$$

ハ出ナイ。